Λογισμικό GeoGebra: Διδακτική πρόταση για την εκμάθηση των «σχετικών θέσεων δυο κύκλων» του μαθήματος της Ευκλείδειας Γεωμετρίας Α' Γενικού Λυκείου

GeoGebra Software: A didactic proposal for teaching "the relative position of two circles" for the lesson of Euclidean Geometry in the 1st grade of Senior High School

Γεράσιμος-Χρήστος Ασωνίτης, *Μαθηματικός, Κάτοχος Μεταπτυχιακού Τίτλου στις Επιστήμες Αγωγής - Διδακτική των Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, gerasimos-chris@outlook.com.gr*

Gerasimos-Christos Asonitis, *Mathematician, M.Ed. in Education Sciences - Teaching of Mathematics and Physical Sciences, gerasimos-chris@outlook.com.gr*

Abstract: It is a true fact that technology nowadays affects several sections in peoples' lives. Especially in education there are plenty of technology tools that can be utilized to improve the learning process, since they enhance students' ability to gain and comprehend the new knowledge. In this paper, we will try to explain how a specific type of those tools, named Dynamic Geometry Software, may bring a positive outcome on students' comprehension when used in class. More specifically, we will present a didactic proposal on how to teach a chapter in Euclidean Geometry by using a Dynamic Geometry Software called GeoGebra. Through the presentation of some pre-made dynamic geometric shapes, as well as directions for their proper use, teachers will be able to conduct a more pleasant lesson. Finally, an effort has been made in expressing the importance of Geometry, as a science, due to the fact that it has been marginalized the recent years.

Keywords: Mathematics, Euclidean Geometry, GeoGebra, Relative position of two circles

Περίληψη: Ως γνωστόν, τα εργαλεία που παρέχει η τεχνολογία επηρεάζουν αρκετούς τομείς της ζωής του ανθρώπου. Σε ό,τι αφορά την εκπαίδευση φαίνεται πως βελτιώνουν σε μεγάλο βαθμό τη διαδικασία της μάθησης αφού ενισχύουν την ικανότητα των μαθητών να προσλαμβάνουν και να κατανοούν τη διδαχθείσα γνώση. Η παρούσα εργασία θα αποπειραθεί να καταδείξει πως η χρήση των τεχνολογικών μέσων κατά τη διδασκαλία ενδέχεται να επιφέρει θετικά αποτελέσματα. Πιο συγκεκριμένα, θα παρουσιαστεί μία διδακτική πρόταση ενός κεφαλαίου της Ευκλείδειας Γεωμετρίας με τη βοήθεια ενός λογισμικού Δυναμικής Γεωμετρίας, του GeoGebra. Μέσω της παράθεσης τόσο των κατασκευασμένων δυναμικών σχημάτων, όσο και των οδηγιών που τα ακολουθούν, οι εκπαιδευτικοί θα είναι σε θέση να διεξάγουν ένα πιο ευχάριστο μάθημα. Τέλος, επιδιώκεται η ανάδειξη της σημαντικότητας του μαθήματος της Γεωμετρίας, μάθημα το οποίο τα τελευταία χρόνια έχει υποτιμηθεί.

Λέξεις κλειδιά: Μαθηματικά, Ευκλείδεια Γεωμετρία, GeoGebra, Σχετικές θέσεις δύο κύκλων

Εισαγωγή

Τα τελευταία χρόνια έχει παρατηρηθεί στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα η σταδιακή υποβάθμιση του μαθήματος της Γεωμετρίας. Αυτή καταγράφεται τόσο εκ μέρους των μαθητών, όσο και των καθηγητών τους (Ιγγλέζου, 2014). Ένας παράγοντας που ενδεχομένως να οδήγησε στην παραπάνω υποβάθμιση είναι η αδυναμία των μαθητών να κατανοήσουν το εν λόγω μάθημα. Η δυσκολία αυτή πιθανόν να οφείλεται στον τρόπο διδασκαλίας του μαθήματος, ο οποίος δεν είναι άλλος από τον παραδοσιακό τρόπο (Θωμαΐδης & Πούλος, 2000· Ιγγλέζου, 2014).

Εν αντιθέσει με τα παραπάνω, αρκετές είναι οι έρευνες οι οποίες αναφέρουν τη θετική επιρροή της Γεωμετρίας στον τομέα της επίδοσης των μαθητών. Η παραπάνω διατύπωση γίνεται εύκολα κατανοητή αν λάβει κανείς υπόψη του πως μέσω αυτής καλλιεργείται η κριτική σκέψη, βελτιώνεται η ικανότητα αναφορικά με την επίλυση προβλημάτων και την απόδειξη, καθώς επίσης ενισχύεται η δημιουργία λογικών επιχειρημάτων και επαγωγικών συλλογισμών (Jones, 2002). Επιπροσθέτως, μέσω της επίλυσης των γεωμετρικών ασκήσεων σημειώνεται ανάπτυξη της ερευνητικής ικανότητας του μαθητή και αυξάνεται η ικανότητά του να κατανοεί εις βάθος και να ερμηνεύει τους μαθηματικούς συλλογισμούς (Αργυρόπουλος, Βλάμος, Κατσούλης, Μαρκάτης & Σίδερης, 2000· Κολέζα & Ντζιαχρήστος, 1990).

Πέραν αυτών, αξίζει να αναφερθεί πως δεν είναι λίγες οι μελέτες οι οποίες υποστηρίζουν πως η διδασκαλία της Γεωμετρίας στο σχολείο προσφέρει στους νέους αρκετά εφόδια για το μέλλον. Διότι, μέσω της σωστής εκμάθησής της οι μαθητές δύνανται να κατανοούν αφενός τον τρόπο με τον οποίο λειτουργεί η φύση, αφού ως γνωστόν η ίδια είναι γεωμετρική (Bursill-Hall, 2002), αφετέρου είναι σε θέση να εφαρμόζουν τις γεωμετρικές γνώσεις τους σε διάφορες περιοχές των Μαθηματικών (Jones, 2002· Αργυρόπουλος κ.ά., 2000) καθώς επίσης και σε διάφορες άλλες επιστήμες, όπως για παράδειγμα στη Φυσική (Andrade-Molina & Ravn, 2016), την αρχιτεκτονική και το σχέδιο (Jones, 2002).

Όπως έγινε αντιληπτό, η διδασκαλία της Γεωμετρίας καθίσταται ακρογωνιαίος λίθος για την πνευματική διάπλαση των παιδιών. Ως εκ τούτου, κρίνεται αναγκαίο να βρεθούν νέοι τρόποι εκμάθησής της ώστε να γίνει θελκτική και συνάμα κατανοητή για τους μαθητές. Συνεπώς, στην παρούσα εργασία παρουσιάζεται μία διδακτική πρόταση διδασκαλίας της Γεωμετρίας. Αυτή πραγματώνεται με τη συμβολή της τεχνολογίας και συγκεκριμένα με τη χρήση λογισμικών Δυναμικής Γεωμετρίας. Η αρχή της Δυναμικής Γεωμετρίας, σύμφωνα με τον Μουσουλίδη (2014), είναι:

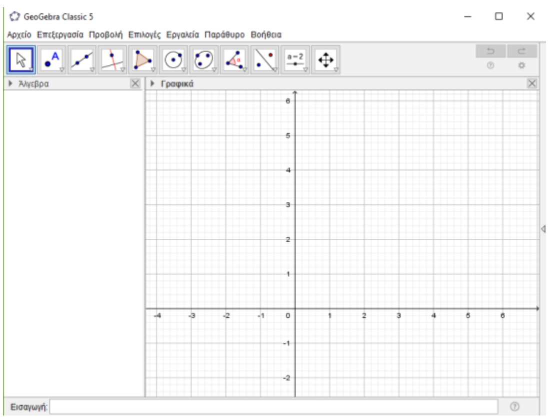
> Αντικείμενα όπως σημεία, ευθείες και κύκλοι σε ένα περιβάλλον Δυναμικής Γεωμετρίας σχετίζονται μεταξύ τους με γεωμετρικούς περιορισμούς και όταν κάποια από τα αντικείμενα σύρονται (drag), άλλα αντικείμενα που συνδέονται με αυτά δυναμικά ανανεώνονται, ώστε οι γεωμετρικοί περιορισμοί / σχέσεις να διατηρούνται. Το σύρσιμο (dragging), το οποίο είναι η καρδιά της δυναμικής γεωμετρίας, απελευθερώνει ένα σχήμα από τον συμβατικό του ρόλο (αναπαράσταση ή τυπική περίπτωση) και το μετατρέπει σε μια γενική περίπτωση. Το τελευταίο (γενική περίπτωση) βρίσκεται στην καρδιά των Μαθηματικών και αποτελεί κρίσιμο στοιχείο της διδασκαλίας. (σ. 12)

Στην παρούσα περίπτωση θα γίνει χρήση του λογισμικού που φέρει την ονομασία GeoGebra, αν και αξίζει να επισημανθεί η πληθώρα αυτών των λογισμικών στο διαδίκτυο. Το GeoGebra, όπως θα παρουσιαστεί αναλυτικότερα και παρακάτω προσφέρει αρκετά πλεονεκτήματα στους μαθητές. Αυτό διότι με τη χρήση του κατά τη διδασκαλία αυξάνει τις επιδόσεις τους (Bhagat & Chang, 2015· Mensah-Wonkyi & Tay, 2018), ενισχύει την κατανόηση του μαθήματος (Αποστόλου & Λεμονίδης, 2011· Κουλούρης, 2014), δημιουργεί θετικά συναισθήματα σε αυτούς (Kondratieva, 2011), αυξάνει τη διάθεση τους στο μάθημα, τους βοηθά στο να αναπτύσσουν αυτοπεποίθηση καθώς και να βελτιώνουν την αυτοεικόνα τους (Ασωνίτης, 2018).

1. Το λογισμικό GeoGebra

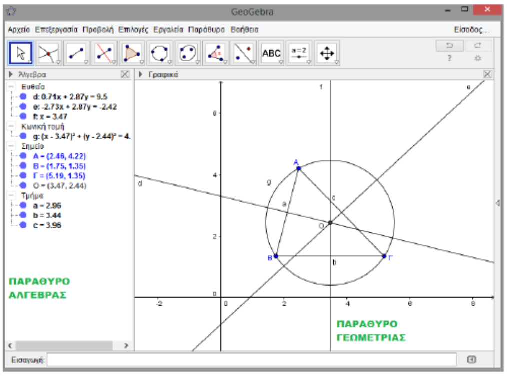
Αρκετά σημαντικό καθίσταται το γεγονός ότι το λογισμικό GeoGebra είναι ένα δωρεάν λογισμικό Δυναμικής Γεωμετρίας, το οποίο διατίθεται για κατέβασμα στην ιστοσελίδα (https://www.geogebra.org/). Η ετυμολογία της λέξης GeoGebra προέρχεται από τις λέξεις Geometry και Algebra και δημιουργός του είναι ο Markus Hohenwarter (Hohenwarter, 2002). Αυτό που το καθιστά ιδιαίτερο, σε αντίθεση με άλλα μαθηματικά λογισμικά, είναι η ιδιότητα του να συνδυάζει τη γεωμετρία, την άλγεβρα και την αριθμητική και ως εκ τούτου είναι κατάλληλο για χρήση σε όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης (Escuder & Furner, 2011).

Κατά το άνοιγμα του εν λόγω λογισμικού, εμφανίζεται το εξής «παράθυρο» (βλ. Εικόνα 1):



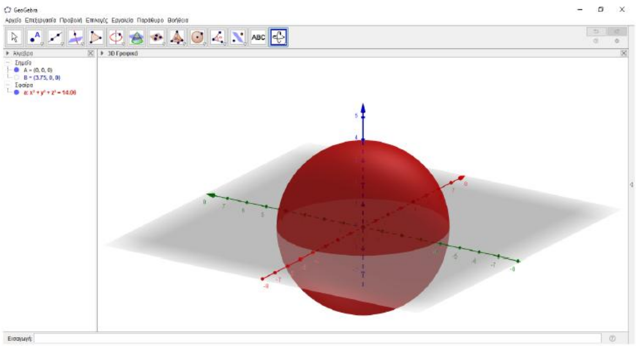
Εικόνα 1. Παράθυρο που εμφανίζεται κατά το άνοιγμα του λογισμικού GeoGebra

Όπως γίνεται εύκολα αντιληπτό στα αριστερά του «παραθύρου» υπάρχει το «παράθυρο της άλγεβρας», ενώ στα δεξιά το «παράθυρο της γεωμετρίας». Κάθε αντικείμενο που υπάρχει στο ένα «παράθυρο» ανταποκρίνεται στις διάφορες αλλαγές που υφίσταται το άλλο και αντίστροφα (βλ. Εικόνα 2). Έτσι, παρέχεται η δυνατότητα στον χρήστη να παρατηρεί άμεσα τη σχέση που εμφανίζεται μεταξύ της αναλυτικής και της οπτικής αναπαράστασης των μαθηματικών εννοιών (Ardana, Jelatu & Sariyasa, 2018).



Εικόνα 2. Στιγμιότυπο από το GeoGebra, που δείχνει και το «παράθυρο της άλγεβρας» και το «παράθυρο της γεωμετρίας» (Ασωνίτης, 2018, σ. 36)

Στο πάνω μέρος υπάρχει μία γραμμή εργαλείων που χρησιμεύει στην κατασκευή σχημάτων στο επίπεδο. Επιπροσθέτως, οι δυνατότητες του λογισμικού επεκτείνονται και στον χώρο (βλ. Εικόνα 3):



Εικόνα 3. Σφαίρα που σχεδιάστηκε από το λογισμικό GeoGebra (Ασωνίτης, 2018, σ. 37)

Ένας βασικός παράγοντας ο οποίος καθιστά αυτό το λογισμικό εύχρηστο είναι η μη αναγκαιότητα εξειδικευμένων γνώσεων πληροφορικής εκ μέρους του χρήστη. Βεβαίως, για να χρησιμοποιηθεί ορθά, πρέπει ο ενδιαφερόμενος να γνωρίζει τις βασικές ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων ούτως ώστε να είναι σε θέση να τα κατασκευάσει σωστά (Ασωνίτης, 2018). Ασφαλώς όμως στην περίπτωση που ο χρήστης δεν είναι γνώστης της γεωμετρίας δύναται να πειραματιστεί με τα σχήματα κάνοντας χρήση των προσφερόμενων εργαλείων, κατασκευάζοντας αυθαίρετα κύκλους, τρίγωνα κ.ά., αυξομειώνοντας παράλληλα το μέγεθός τους και μετακινώντας τα στο επίπεδο χωρίς αυτά όμως να χάνουν τις ιδιότητες τους.

Φυσικά, υπάρχουν και διάφορα εγχειρίδια χρήσης του λογισμικού για την πληρέστερη κατανόηση του, όπως για παράδειγμα εκείνο των Hohenwarter και Preiner (2007), που είναι σε ελληνική μετάφραση και αφορά μία παλαιότερη έκδοση του GeoGebra (έκδοση 3.0).

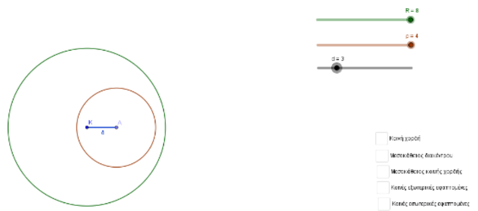
Πέραν λοιπόν των παραπάνω, άξιο μνείας αποτελεί το ότι το λογισμικό αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί εύκολα και από τους εκπαιδευτικούς. Αυτό διότι τους παρέχει τη δυνατότητα δημιουργίας διάφορων δυναμικών φύλλων εργασίας (dynamic worksheets), τα οποία αποτελούνται από ένα διαδραστικό εφαρμογίδιο (applet) και οδηγίες μαζί με ασκήσεις διερεύνησης κατάλληλα προσαρμοσμένες για την πληρέστερη κατανόηση αυτού (Βλάχος, 2010). Έτσι, μέσω της προσωπικής ενασχόλησης των μαθητών θα προωθείται η ενεργός συμμετοχή αυτών και θα καλλιεργείται το ομαδικό πνεύμα, στις περιπτώσεις που θα κληθούν να λειτουργήσουν σε ομάδες για την επίλυση μιας άσκησης (Lazarus & Roulet, 2014). Επιπλέον, θα έχουν τη δυνατότητα να κατακτούν μόνοι τους (ή και με τη βοήθεια του καθηγητή) τη γνώση, διατηρώντας παράλληλα τη θετική τους διάθεση για το μάθημα (Flores, 2015· Lazarus & Roulet, 2014).

Στα πλαίσια των προαναφερθέντων, παρατίθεται παρακάτω μία διδακτική πρόταση ενός κεφαλαίου του μαθήματος της Ευκλείδειας Γεωμετρίας της Α' Γενικού Λυκείου. Το κεφάλαιο αυτό συγκεκριμένα είναι το 3.16 του σχολικού βιβλίου και έχει τίτλο «Σχετικές θέσεις δυο κύκλων».

2. Η θεωρία πάνω στην οποία βασίζεται η διδακτική πρόταση

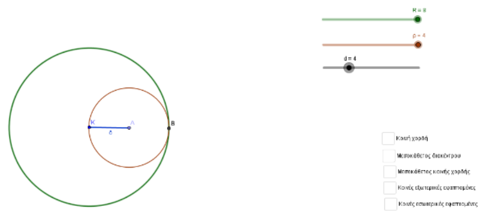
Κατ' αρχάς, κρίνεται αναγκαίο να διασαφηνιστούν ορισμένες έννοιες που σχετίζονται με το κεφάλαιο «Σχετικές θέσεις δυο κύκλων», καθώς και μερικά θεωρήματα που υπάρχουν στο σχολικό βιβλίο, λόγω του ότι στην πορεία θα είναι συχνή η εμφάνιση τους κατά τη χρήση του λογισμικού. Σύμφωνα, λοιπόν, με τους συγγραφείς του σχολικού βιβλίου, Αργυρόπουλο, Βλάμο, Κατσούλη, Μαρκάτη και Σίδερη (2017) δύο κύκλοι μπορούν να ικανοποιούν μια από τις παρακάτω θέσεις:

•Ο μικρότερος κύκλος να βρίσκεται στο εσωτερικό του μεγαλύτερου (βλ. Σχήμα 1).



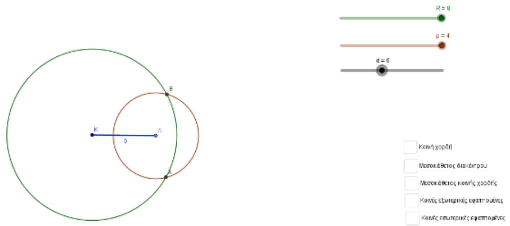
Σχήμα 1. Ο μικρός κύκλος βρίσκεται στο εσωτερικό του μεγάλου

•Οι κύκλοι να εφάπτονται εσωτερικά (βλ. Σχήμα 2).



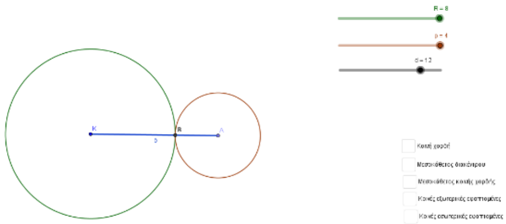
Σχήμα 2. Οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά

•Οι κύκλοι να τέμνονται (βλ. Σχήμα 3).



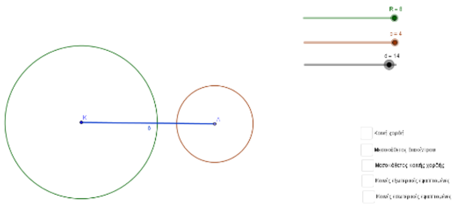
Σχήμα 3. Οι κύκλοι τέμνονται

•Οι κύκλοι να εφάπτονται εξωτερικά (βλ. Σχήμα 4).



Σχήμα 4. Οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά

•Κάθε κύκλος να βρίσκεται στο εξωτερικό του άλλου (βλ. Σχήμα 5).



Σχήμα 5. Κάθε κύκλος βρίσκεται στο εξωτερικό του άλλου

Απαραίτητη λοιπόν προϋπόθεση για να γνωρίζουμε τη σχετική τους θέση αποτελεί η σχέση που έχει η *διάκεντρος* των δύο κύκλων, δηλαδή η απόσταση των κέντρων τους, με τη διαφορά και το άθροισμα των ακτίνων των κύκλων. Πιο συγκεκριμένα, αν συμβολίσουμε με δ τη διάκεντρο των δύο κύκλων με ακτίνες R και ρ, παίρνοντας αυθαίρετα $R \geq \rho$, τότε ισχύουν τα παρακάτω:

•Ο κύκλος ακτίνας ρ βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου ακτίνας R, αν και μόνο αν

$\delta < R-\rho$.

•Οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά, αν και μόνο αν $\delta = R-\rho$.

•Οι κύκλοι τέμνονται, αν και μόνο αν $R-\rho < \delta < R+\rho$.

•Οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά, αν και μόνο αν δ=R+ρ.

•Κάθε κύκλος βρίσκεται στο εξωτερικό του άλλου, αν και μόνο αν δ>R+ρ.

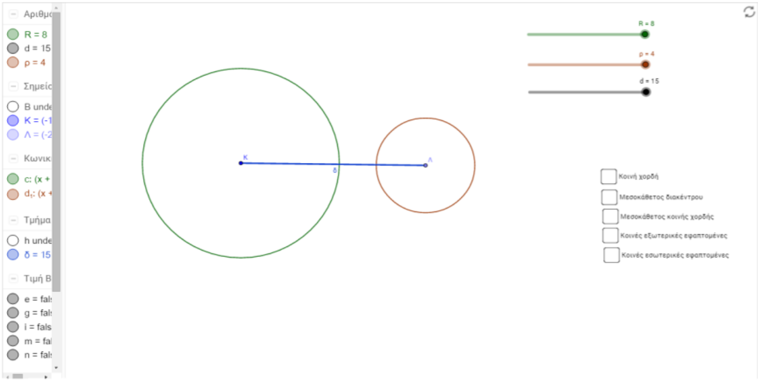
Στην περίπτωση που οι δύο κύκλοι εφάπτονται, το κοινό τους σημείο ονομάζεται *σημείο επαφής* και βρίσκεται πάνω στη διάκεντρο τους όταν αυτοί εφάπτονται εξωτερικά. Όταν οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά, τότε το σημείο επαφής βρίσκεται στην ευθεία που ορίζει η διάκεντρος (Παπαδάκης, 2010). Επίσης, στην περίπτωση που οι δύο κύκλοι τέμνονται, το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία τομής τους, ονομάζεται *κοινή χορδή* των κύκλων αυτών. Επιπλέον, άξιο αναφοράς αποτελεί και το ακόλουθο θεώρημα: «*Η διάκεντρος δύο τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής τους*». Στην περίπτωση μάλιστα που οι δύο κύκλοι είναι ίσοι, τότε και η κοινή χορδή αυτών είναι μεσοκάθετος της διακέντρου.

Τέλος, δύο κύκλοι ανάλογα με τη θέση που έχουν, μπορούν να εμφανίσουν καμία, μία ή και δύο *κοινές εξωτερικές* και *εσωτερικές εφαπτομένες*. Οι κοινές εξωτερικές εφαπτομένες των δύο κύκλων είναι οι ευθείες που εφάπτονται και στους δύο κύκλους και τους αφήνουν προς το ίδιο μέρος τους, ενώ οι κοινές εσωτερικές εφαπτομένες, είναι οι ευθείες που έχουν τους κύκλους στους οποίους εφάπτονται εκατέρωθεν αυτών.

3. Διδακτική Πρόταση

Σκοπός της παρούσας διδακτικής πρότασης αποτελεί η ανάδειξη εναλλακτικών τρόπων μάθησης του μαθήματος της Ευκλείδειας Γεωμετρίας πέραν του παραδοσιακού. Επιπλέον, στοχεύει στην εξοικείωση τόσο των εκπαιδευτικών, όσο και των μαθητών (στην εν λόγω περίπτωση της Α' τάξης Γενικού Λυκείου) με το λογισμικό GeoGebra. Τα προσδοκώμενα αποτελέσματα αυτής της διδακτικής πρότασης είναι τα εξής: 1. αποδοχή των εναλλακτικών τρόπων διδασκαλίας από πλευράς εκπαιδευτικών, καθώς και μελλοντική χρήση αυτών κατά την εκπαιδευτική διαδικασία και 2. πληρέστερη κατανόηση του μαθήματος «σχετικές θέσεις δυο κύκλων» από πλευράς μαθητών, μέσω ενός ευχάριστου και διαδραστικού τρόπου μάθησης.

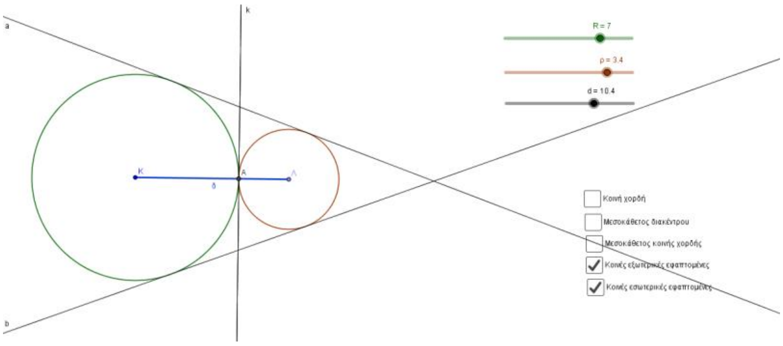
Για την εκμάθηση της παραπάνω θεωρίας του σχολικού βιβλίου, με τη βοήθεια του λογισμικού GeoGebra, ο χρήστης θα πρέπει πρωτίστως να επισκεφθεί την ιστοσελίδα (https://www.geogebra.org/m/mGy9Zn9Q). Ανοίγοντάς την λοιπόν, εμφανίζεται ένα διαδραστικό εφαρμογίδιο (βλ. Σχήμα 6), που είναι ιδιοκατασκευή και στο οποίο υπάρχουν δύο κύκλοι, ο κύκλος (Κ , R) και ο κύκλος (Λ , ρ), με R≥ρ.



Σχήμα 6. Στιγμιότυπο του συνδέσμου (https://www.geogebra.org/m/mGy9Zn9Q)

Όπως διαφαίνεται και στο παραπάνω σχήμα, ο χρήστης δύναται να πειραματιστεί πατώντας ένα ή και περισσότερα από τα κουμπιά που αντιπροσωπεύουν: την «κοινή χορδή» των δύο κύκλων, τη «μεσοκάθετο της διακέντρου», τη «μεσοκάθετο της κοινής χορδής», τις «κοινές εξωτερικές εφαπτομένες» και τις «κοινές εσωτερικές εφαπτομένες». Επιπρόσθετα, παρέχεται η δυνατότητα στον χρήστη να δοκιμάσει τις δυνατές θέσεις που μπορεί να έχουν οι δύο κύκλοι, μετακινώντας τον δρομέα d, ο οποίος μεταβάλλει το μήκος της διακέντρου των δύο κύκλων. Επιπλέον, «πειράζοντας» τους δρομείς R και ρ, οι οποίοι εκφράζουν τις ακτίνες των κύκλων (Κ , R) και (Λ , ρ), μπορεί να ελέγξει τις σχετικές τους θέσεις και πέρα από τις προκαθορισμένες τιμές των ακτίνων. Για παράδειγμα, αν επιλέξουμε τις τιμές R=7, ρ=3.4 και d=10.4 για τους δρομείς και επιλέξουμε να εμφανιστούν οι κοινές εξωτερικές και εσωτερικές εφαπτομένες, θα παρατηρήσουμε ότι οι κύκλοι θα εφάπτονται εξωτερικά (αφού R+ρ = 7+3.4 = 10.4 = d), ενώ θα έχουν δύο κοινές εξωτερικές εφαπτομένες και μία εσωτερική, η οποία θα διέρχεται από το σημείο επαφής τους (βλ. Σχήμα 7).

Με αυτόν τον τρόπο, ο μαθητής θα μπορεί να αποκτήσει μια σφαιρική αλλά και ολοκληρωμένη άποψη για τις σχετικές θέσεις των δύο κύκλων, ενώ μέσα από τις διαφορετικές τιμές των δρομέων δύναται να κατανοήσει ευκολότερα ότι, όσα διδάσκεται, δεν ισχύουν μόνο για τα συγκεκριμένα παραδείγματα που χρησιμοποιεί, αλλά και για οποιεσδήποτε τιμές και αν λάβουν οι ακτίνες. Επομένως, επιτυγχάνεται η αφομοίωση της γνώσης εφόσον αυτή προέκυψε από προσωπική μελέτη και διερεύνηση του μαθητή και συνεπώς δύναται να μεταφέρει τις γνώσεις που αποκτάει από την ειδική περίπτωση στη γενική.



Σχήμα 7. Οι σχετικές θέσεις των κύκλων (Κ , R) και (Λ , ρ), όταν R=7, ρ=3.4 και d=10.4

Όπως είναι φυσικό, θα ήταν συνετό ο εκπαιδευτικός που θα επέλεγε να χρησιμοποιήσει το εν λόγω εφαρμογίδιο, να παρέχει στους μαθητές του συμπληρωματικά και κατάλληλες οδηγίες μαζί με ασκήσεις προσαρμοσμένες για την πληρέστερη κατανόηση του. Αυτό καθίσταται αναγκαίο διότι παραθέτοντας μόνο του το εφαρμογίδιο, ενδέχεται να οδηγήσει τους χρήστες/μαθητές να πράξουν κινήσεις κατά τύχη, χωρίς καμία συνοχή και χωρίς να προσπαθούν να εξαγάγουν συμπεράσματα από τους διάφορους πειραματισμούς τους. Συνεπώς, δεν θα καταφέρει να επιτύχει τα αναμενόμενα εκπαιδευτικά αποτελέσματα.

Παρακάτω δίδονται οδηγίες-ασκήσεις που επεξηγούν αναλυτικά τις κινήσεις που προτείνεται να πραγματοποιήσουν οι μαθητές και το οποίο είναι διαθέσιμο στο σύνδεσμο που έχει προαναφερθεί:

Οδηγίες-Ασκήσεις

Για τις παρακάτω ασκήσεις (πλην κάποιων εξαιρέσεων) θα χρησιμοποιήσουμε ως ακτίνες των δύο κύκλων τις τιμές R=8 και ρ=4. Ας ελέγξουμε τις σχετικές θέσεις που μπορούν να έχουν δύο κύκλοι…

1η περίπτωση: Ο δρομέας d να έχει την τιμή d=3.

•Ποια είναι η θέση του κύκλου (Λ,ρ) σε σχέση με τον κύκλο (Κ,R);

……………………………………………………………………………………………….

•Πόσα κοινά σημεία έχουν;

……………………………………………………………………………………………….

•Συγκρίνετε το μήκος της διακέντρου με τη διαφορά R-ρ των ακτίνων. Τι παρατηρείτε;

……………………………………………………………………………………………….

•Πατήστε το κουμπί "Κοινές εξωτερικές εφαπτομένες". Τι παρατηρείτε; ……………………………………………………………………………………………….

•Πατήστε το κουμπί "Κοινές εσωτερικές εφαπτομένες". Τι παρατηρείτε; ……………………………………………………………………………………………….

•Επιλέξτε ο δρομέας d να έχει τιμή d=0. Πως ονομάζονται οι δύο κύκλοι σε αυτήν την περίπτωση; Ποια η θέση του κύκλου (Λ,ρ) σε σχέση με τον κύκλο (Κ,R);

……………………………………………………………………………………………

•Θα μπορούσατε να βγάλετε κάποιο γενικό συμπέρασμα για τη θέση των δύο κύκλων; Ο κύκλος (Λ,ρ) βρίσκεται ……………………… (K,R), αν και μόνο αν, δ…R-ρ.

2η περίπτωση: Ο δρομέας d να έχει την τιμή d=4.

•Ποια είναι η θέση του κύκλου (Λ,ρ) σε σχέση με τον κύκλο (K,R);

……………………………………………………………………………………………

•Πόσα κοινά σημεία έχουν;

……………………………………………………………………………………………

•Συγκρίνετε το μήκος της διακέντρου με τη διαφορά R-ρ των ακτίνων. Τι παρατηρείτε;

……………………………………………………………………………………………

•Πατήστε το κουμπί "Κοινές εξωτερικές εφαπτομένες". Τι παρατηρείτε; ……………………………………………………………………………………………

•Πατήστε το κουμπί "Κοινές εσωτερικές εφαπτομένες". Τι παρατηρείτε; ……………………………………………………………………………………………

•Θα μπορούσατε να βγάλετε κάποιο γενικό συμπέρασμα για τη θέση των δύο κύκλων; Οι κύκλοι………………………………….., αν και μόνο αν, δ…R-ρ.

3η περίπτωση: Ο δρομέας d να έχει την τιμή d=6 και την τιμή d=8.

•Ποια είναι η θέση των δύο κύκλων στις παραπάνω περιπτώσεις;

…………………………………………………………………………………………....

•Πόσα κοινά σημεία έχουν;

……………………………………………………………………………………………

•Συγκρίνετε το μήκος της διακέντρου με τη διαφορά R-ρ και το άθροισμα R+ρ των ακτίνων. Τι παρατηρείτε;

……………………………………………………………………………………………

•Πατήστε το κουμπί "Κοινές εξωτερικές εφαπτομένες". Τι παρατηρείτε; ……………………………………………………………………………………………

•Πατήστε το κουμπί "Κοινές εσωτερικές εφαπτομένες". Τι παρατηρείτε; ……………………………………………………………………………………………

•Πατήστε το κουμπί "Κοινή χορδή". Θα εμφανιστεί το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, το οποίο ονομάζεται έτσι, επειδή είναι χορδή και των δύο κύκλων. Αν πατήσετε το κουμπί "Μεσοκάθετος κοινής χορδής" τι παρατηρείτε; Παρατηρούμε ότι η διάκεντρος, δ, ………………………………………………………

•Θα μπορούσατε να βγάλετε κάποιο γενικό συμπέρασμα για τη θέση των δύο κύκλων; Οι κύκλοι…………………………, αν και μόνο αν, R-ρ…δ…R+ρ.

4η περίπτωση: Ο δρομέας d να έχει την τιμή d=12.

•Ποια είναι η θέση των δύο κύκλων στην παραπάνω περίπτωση;
…………………………………………………………………………………….....

•Πόσα κοινά σημεία έχουν;
…………………………………………………………………………………….

•Συγκρίνετε το μήκος της διακέντρου με το άθροισμα R+ρ των ακτίνων. Τι παρατηρείτε;
…………………………………………………………………………………….

•Πατήστε το κουμπί "Κοινές εξωτερικές εφαπτομένες". Τι παρατηρείτε;
…………………………………………………………………………………….

•Πατήστε το κουμπί "Κοινές εσωτερικές εφαπτομένες". Τι παρατηρείτε;
…………………………………………………………………………………….

•Θα μπορούσατε να βγάλετε κάποιο γενικό συμπέρασμα για τη θέση των δύο κύκλων; Οι κύκλοι……………………………………., αν και μόνο αν, δ…R+ρ.

5η περίπτωση: Ο δρομέας d να έχει την τιμή d=14.

•Ποια είναι η θέση των δύο κύκλων στην παραπάνω περίπτωση;
…………………………………………………………………………………….....

•Πόσα κοινά σημεία έχουν;
…………………………………………………………………………………….

•Συγκρίνετε το μήκος της διακέντρου με το άθροισμα R+ρ των ακτίνων. Τι παρατηρείτε;
…………………………………………………………………………………….

•Πατήστε το κουμπί "Κοινές εξωτερικές εφαπτομένες". Τι παρατηρείτε;
…………………………………………………………………………………….

•Πατήστε το κουμπί "Κοινές εσωτερικές εφαπτομένες". Τι παρατηρείτε;
…………………………………………………………………………………….

•Θα μπορούσατε να βγάλετε κάποιο γενικό συμπέρασμα για τη θέση των δύο κύκλων; Κάθε κύκλος είναι…………………… του άλλου, αν και μόνο αν, δ…R+ρ.

Ας θυμηθούμε την περίπτωση που οι δύο κύκλοι τέμνονται… Θα επιλέξουμε, για αλλαγή διαφορετικές τιμές για τα R και ρ.

•Επιλέξτε R=5.5, ρ=3.5 και d=5.7. Οι κύκλοι σε αυτήν την περίπτωση είναι άνισοι, εφόσον έχουν διαφορετικές ακτίνες. Πατήστε τα κουμπιά "Κοινή χορδή" και "Μεσοκάθετος διακέντρου". Τι παρατηρείτε; Η κοινή χορδή δύο άνισων κύκλων ………….. μεσοκάθετος της διακέντρου.

•Επιλέξτε τώρα R=4, ρ=4 και d=5.7. Οι κύκλοι σε αυτήν την περίπτωση είναι ίσοι, εφόσον έχουν ίσες ακτίνες. Πατήστε τα κουμπιά "Κοινή χορδή" και "Μεσοκάθετος διακέντρου". Τι παρατηρείτε; Η κοινή χορδή δύο ίσων κύκλων ………….. μεσοκάθετος της διακέντρου.

ΑΣΚΗΣΗ

Να προσδιοριστούν οι σχετικές θέσεις των κύκλων (Κ,6) και (Λ,3.3), αν:

α. δ = 2.7

β. δ = 9.3

γ. δ = 1.1

δ. δ = 4.2

ε. δ = 12.4

Οι οδηγίες-ασκήσεις έχουν σκοπό να λειτουργήσουν ως κατευθυντήρια γραμμή, την οποία θα ακολουθήσει ο μαθητής για την σταδιακή και εις βάθος κατανόηση του κεφαλαίου. Ειδικότερα, οι στόχοι των οδηγιών-ασκήσεων είναι έξι και είναι οι εξής:

1. Ο μαθητής να εφαρμόζει, χωρίς λάθος, τις οδηγίες που του δίνονται σχετικά με τη χρήση του λογισμικού GeoGebra.
2. Ο μαθητής να αναγνωρίζει όλες τις πιθανές σχετικές θέσεις δυο κύκλων, μέσω της ενασχόλησης του με το λογισμικό GeoGebra.
3. Ο μαθητής να ανακαλύπτει τις σχέσεις που συνδέουν τη διάκεντρο των δυο κύκλων με τη διαφορά και το άθροισμα των ακτίνων τους, για καθεμία από τις σχετικές τους θέσεις.
4. Ο μαθητής να εντοπίζει τα κοινά σημεία δυο κύκλων, χρησιμοποιώντας αποκλειστικά το λογισμικό GeoGebra.
5. Ο μαθητής να ανακαλύπτει το πλήθος των κοινών εξωτερικών και εσωτερικών εφαπτομένων δυο κύκλων με τη χρήση του λογισμικού GeoGebra.
6. Ο μαθητής να ανακαλύπτει τη σχέση που διέπει τη διάκεντρο δυο κύκλων με την κοινή τους χορδή, στις περιπτώσεις που αυτοί είναι άνισοι ή ίσοι, κάνοντας χρήση του λογισμικού GeoGebra.

Στα πλαίσια της επίτευξης των παραπάνω στόχων, τα βήματα που καλείται ο χρήστης να ακολουθήσει δύνανται να χαρακτηριστούν «απλοϊκά» και εξετάζουν όλες τις πιθανές περιπτώσεις, ακόμα και αυτές που δεν παρουσιάζουν κάποιο αξιοσημείωτο αποτέλεσμα. Για παράδειγμα, αν επιλέξουμε τις τιμές R=8, ρ=4 και d=2.4 τότε ο μικρός κύκλος θα βρίσκεται στο εσωτερικό του μεγάλου και αυτό έχει ως αποτέλεσμα αν επιλέξουμε τα κουμπιά «εξωτερικές εφαπτομένες» και «εσωτερικές εφαπτομένες» να μην εμφανίζεται κάποιο αποτέλεσμα.

Παρ' όλα αυτά, θεωρήθηκε αναγκαία η δυνατότητα στους μαθητές να εξετάζουν και αυτές τις περιπτώσεις, αφού σκοπός του συγκεκριμένου τρόπου διδασκαλίας είναι η ενίσχυση της διερευνητικής μάθησης ούτως ώστε, ο μαθητής μέσω της δικής του μελέτης αλλά και των στρατηγικών που καλείται να εφαρμόσει να είναι σε θέση να κατανοήσει αλλά και τελικώς να επιλέξει αυτό που του χρειάζεται. Επιπλέον, στο τέλος δίνεται μια απλή άσκηση, σκοπός της οποίας είναι ο πειραματισμός των μαθητών με το λογισμικό χωρίς την καθοδήγηση του καθηγητή τους. Σε αυτήν λοιπόν, πρέπει οι μαθητές να προσδιορίσουν τις σχετικές θέσεις των δύο κύκλων, έχοντας όμως προκαθορισμένο το μήκος των ακτίνων τους, για τις διάφορες τιμές της διακέντρου δ. Για να μπορέσουν να δώσουν λύση, αρκεί να μετακινήσουν τον δρομέα d από τη μία θέση στην άλλη και στη συνέχεια να καταγράψουν τις απαντήσεις τους.

Όμως, θα πρέπει να επισημανθεί ότι το συγκεκριμένο δυναμικό φύλλο εργασίας (το εφαρμογίδιο μαζί με τις οδηγίες και τις ασκήσεις) παρέχει στους μαθητές, μέσω παραδειγμάτων, μόνο πληροφορίες για το μάθημα χωρίς να αποδεικνύονται τα θεωρήματα που εμφανίζονται στην πορεία. Παρ' όλα αυτά, ο χρήστης δύναται να τα επιβεβαιώσει, εφόσον επιθυμεί, πατώντας τα κατάλληλα κουμπιά. Αξίζει σε αυτό το σημείο να τονιστεί πως το παρόν εφαρμογίδιο κατασκευάστηκε με γνώμονα την επίλυση κυρίως απλοϊκών ασκήσεων. Επομένως, θεωρείται πως θα μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε πρώτη φάση, εφόσον στοχεύει στην κατανόηση της θεωρίας.

Κατά την προσωπική κρίση του συγγραφέα θα ήταν συνετό να χρησιμοποιηθεί αυτό το δυναμικό φύλλο εργασίας παράλληλα με τις παραδοσιακές μεθόδους μάθησης. Σε αυτή την περίπτωση, ο μαθητής θα έχει τη δυνατότητα να εμπλουτίσει τις γνώσεις του και μέσω της καθοδήγησης του καθηγητή του να κατανοήσει εις βάθος τη διδαχθείσα ύλη. Απαλλάσσεται λοιπόν από τον «μονότονο» τρόπο διδασκαλίας και αποκτά ενεργητικότερο ρόλο στη διαδικασία της πρόσληψης της γνώσης, εφόσον χρησιμοποιεί στην πράξη όσα μαθαίνει, αναλαμβάνοντας πρωτοβουλίες.

4. Ανακεφαλαίωση - Συζήτηση

Σκοπός της παρούσας εργασίας ήταν η ανάδειξη της σημαντικότητας του μαθήματος της Γεωμετρίας στις διάφορες βαθμίδες της εκπαίδευσης (Jones, 2002· Αργυρόπουλος κ.ά., 2000· Κολέζα & Ντζιαχρήστος, 1990). Πλην αυτού, παρουσιάστηκε η έντονη ανησυχία που παρατηρείται τα τελευταία χρόνια σχετικά με την κατανόηση του εν λόγω μαθήματος από πλευράς μαθητών, καθώς επίσης και η συσχέτιση αυτής της δυσκολίας με τον τρόπο που διδάσκεται η Γεωμετρία, δηλαδή με τον παραδοσιακό τρόπο διδασκαλίας (Θωμαΐδης & Πούλος 2000· Ιγγλέζου, 2014). Συνεπώς, έγιναν προτάσεις ένταξης άλλων μεθόδων διδασκαλίας και συγκεκριμένα αυτών που αξιοποιούν την τεχνολογία και ειδικότερα τον ηλεκτρονικό υπολογιστή.

Ειδικότερα, αφορούσαν μία ομάδα λογισμικών, που ονομάζονται λογισμικά Δυναμικής Γεωμετρίας. Μάλιστα, παρουσιάστηκε ένα από αυτά, το GeoGebra, διότι είναι ένα δωρεάν λογισμικό, ενώ συγκριτικά με άλλα της ίδιας κατηγορίας συνδυάζει τη γεωμετρία με την άλγεβρα (Αποστόλου & Λεμονίδης, 2011). Το GeoGebra λοιπόν βάσει διαφόρων μελετών (Bhagat & Chang, 2015· Kondratieva, 2011· Mensah-Wonkyi & Tay, 2018· Ασωνίτης, 2018· Κουλούρης, 2014) είναι ικανό να αυξήσει τις επιδόσεις των μαθητών, να ενισχύσει την κατανόηση του μαθήματος και να αυξήσει τη διάθεση τους για το μάθημα δημιουργώντας τους θετικά συναισθήματα. Ως εκ τούτου, είναι εύλογο πως η ενσωμάτωσή του στις διάφορες εκπαιδευτικές βαθμίδες δύναται να επιφέρει θετικά αποτελέσματα.

Στη συνέχεια παρουσιάστηκε μία διδακτική πρόταση, η οποία περιελάμβανε ένα δυναμικό φύλλο εργασίας. Αυτό αποτελούταν από ένα διαδραστικό εφαρμογίδιο μαζί με κατάλληλα προσαρμοσμένες οδηγίες και ασκήσεις για τη διδασκαλία του κεφαλαίου «Σχετικές θέσεις δυο κύκλων». Σημαντικό καθίσταται το γεγονός ότι με τη βοήθεια αυτού του δυναμικού φύλλου εργασίας, ο μαθητής είναι πολύ πιθανό να κατανοήσει τις βασικές αλλά δυσκολονόητες έννοιες που βρίσκονται στο κεφάλαιο αυτό καθώς επίσης και να αναγάγει τις γνώσεις που λαμβάνει από την ειδική περίπτωση στη γενική, μέσα από τα διάφορα παραδείγματα που θα χρησιμοποιήσει.

Παρ' όλα αυτά, ένα μειονέκτημα που ενδεχομένως να εμφανίζει το παραπάνω δυναμικό φύλλο εργασίας αποτελεί το ότι δεν παρέχεται η δυνατότητα στον μαθητή να αποδεικνύει τα θεωρήματα που υπάρχουν στο σχολικό βιβλίο, αφού η εκμάθησή τους προκύπτει εμπειρικά και μόνο μέσω των παραδειγμάτων. Αν εξαιρεθεί όμως η παραπάνω αδυναμία, θα μπορούσε να ειπωθεί ότι αυτό προσφέρει στους μαθητές ένα ευχάριστο μάθημα, στα πλαίσια του οποίου οι ίδιοι μπορούν να πειραματιστούν και να διαδραματίσουν κεντρικό ρόλο στη διδασκαλία του μαθήματος, ασφαλώς πάντα με τη σωστή καθοδήγηση του εκπαιδευτικού. Συνεπώς, το παραπάνω δυναμικό φύλλο εργασίας σε συνδυασμό όμως με τον παραδοσιακό τρόπο μάθησης, θα μπορέσει να δημιουργήσει τις κατάλληλες προϋποθέσεις για τη δημιουργία ενός ολοκληρωμένου μαθήματος, το οποίο θα προωθεί τη γνώση και την καλλιέργεια της κριτικής σκέψης αυτών.

Βιβλιογραφικές αναφορές

Andrade-Molina, M., & Ravn, O. (2016). The Euclidean tradition as a paradigm for scientific thinking. *Philosophy of Mathematics Education Journal, 30,* 1-10.

Ardana, I.M., Jelatu, S., & Sariyasa (2018). Effect of GeoGebra-Aided REACT Strategy on Understanding of Geometry Concepts. *International Journal of Instruction, 11*(4), 325-336.

Bhagat, K.K., & Chang, C.Y. (2015). Incorporating GeoGebra into Geometry learning-A lesson from India. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 11*(1), 77-86.

Bursill-Hall, P. (2002). *Why do we study geometry? Answers through the ages* [PDF document]. Ανακτήθηκε στις 11/11/2018, από: https://www.dpmms.cam.ac.uk/~piers/F-I-G_opening_ppr.pdf

Escuder, A., & Furner, J.M. (2011). The Impact of GeoGebra in Math Teachers' Professional Development. *Paper presented at the Twenty-third Annual International Conference on Technology in Collegiate Mathematics*. Denver, Colorado.

Flores, A. (2015). Exploring cyclic quadrilaterals with perpendicular diagonals. *North American GeoGebra Journal*, *4*(1), 1-8.

Hohenwarter, M. (2002). *GeoGebra - Ein Softwaresystem für dynamische Geometrie und Algebra der Ebene* (Unpublished Master's Thesis). Paris Lodron Universität, Salzburg.

Jones, K. (2002). Issues in the Teaching and Learning of Geometry. In L. Haggarty (Ed.), *Aspects of Teaching Secondary Mathematics: perspectives on practice* (pp. 121-139). London: Routledge.

Kondratieva, M. (2011). Geometrical proofs, basic geometric configurations and dynamic geometry software. *Paper presented at the Second North American GeoGebra Conference: Where Mathematics, Education and Technology Meet*. Toronto, Canada.

Lazarus, J., & Roulet, G. (2014). Using Off-the-Shelf Tools to Support Mathematics Collaboration: Technical and Human Successes and Issues. In D. Martinovic, Z. Karadag & D. McDougall (Eds.), *Proceedings of the Fifth North American GeoGebra Conference: Explorative Learning with Technology (GeoGebra-NA 2014)* (pp. 56-59). Toronto, ON: University of Toronto.

Mensah-Wonkyi, T., & Tay, M.K. (2018). Effect of using Geogebra on senior high school tudents’ performance in circle theorems. *African Journal of Educational Studies in Mathematics and Sciences*, *14*, 1-18.

Hohenwarter, M., & Preiner, J. (2007). *Βοήθεια GeoGebra: Επίσημο Εγχειρίδιο έκδοσης 3.0*. Α. Φεργαδιώτης, Μτφρ.). Ανακτήθηκε στις 29/03/2019, από: https://eclass.gunet.gr/modules/document/file.php/TELEGU241/GeoGebra_docuel30.pdf

Αποστόλου, Χ., & Λεμονίδης, Χ. (2011). Συμπεριφορές μαθητών Γ’ Γυμνασίου σε αποδείξεις προβλημάτων γεωμετρίας με το πρόγραμμα Geogebra. *Ευκλείδης Γ’*, *74*, 179-195.

Αργυρόπουλος, Η., Βλάμος, Π., Κατσούλης, Γ., Μαρκάτης, Σ., & Σίδερης, Π. (2000). *Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου (Βιβλίο Καθηγητή)*. Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων.

Αργυρόπουλος, Η., Βλάμος, Π., Κατσούλης, Γ., Μαρκάτης, Σ. & Σίδερης, Π. (2017). *Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ Γενικού Λυκείου: Τεύχος Α΄ (Βιβλίο Μαθητή)*. Αθήνα: Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων «Διόφαντος».

Ασωνίτης, Γ.Χ. (2018). *Αξιοποιώντας το λογισμικό GeoGebra στην εκμάθηση ενοτήτων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας Α’ Γενικού Λυκείου* (Αδημοσίευτη Μεταπτυχιακή Εργασία). Πανεπιστήμιο Λευκωσίας, Λευκωσία. Διαθέσιμο στο: https://pqdtopen.proquest.com/doc/2237498372.html?FMT=AI

Βλάχος, Α. (2010). *Η χρήση της τεχνολογίας στη διδασκαλία εννοιών του Απειροστικού Λογισμού* (Αδημοσίευτη Μεταπτυχιακή Εργασία). Πανεπιστήμιο Πάτρας, Πάτρα.

Θωμαΐδης, Γ., & Πούλος, Α. (2000). *Διδακτική της Ευκλείδειας Γεωμετρίας*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζήτη.

Ιγγλέζου, Α. (2014). *Επιστημολογική και Διδακτική Ανάλυση του μαθήματος της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στην Ελλάδα* (Αδημοσίευτη Μεταπτυχιακή Εργασία). Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Αθήνα.

Κολέζα, Ε., & Ντζιαχρήστος, Β. (1990). Η Διδασκαλία της Γεωμετρίας στα Σχολεία: Επίπεδα P. M. Van Hiele. *Μαθηματική Επιθεώρηση*, *37*, 11-23.

Κουλούρης, Α. (2014). Διδασκαλία των ιδιοτήτων του ορθικού τριγώνου με χρήση λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας. *Έρκυνα, Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών–Επιστημονικών Θεμάτων*, *3*, 20-30.

Μουσουλίδης, Ν. (2014). *Γεωμετρική σκέψη στα πλαίσια της δυναμικής γεωμετρίας* [Πανεπιστημιακές Σημειώσεις]. Πανεπιστήμιο Λευκωσίας, Σχολή Επιστημών Αγωγής, Π.Μ.Σ.: "Διδακτική των Μαθηματικών και των Φυσικών Επιστημών", Χειμερινό Εξάμηνο 2014. Λευκωσία.

Παπαδάκης, Β. (2010). *Γεωμετρία Α' Λυκείου*. Αθήνα: Εκδόσεις Σαββάλας.